

# Zur Frage des Lichtweges bei Totalreflexion\*

VON HANS WOLTER

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel

(Z. Naturforsch. 5a, 276–283 [1950]; eingegangen am 9. April 1949)

Die Auffassung, das Licht mache bei Totalreflexion einen Umweg durch das dünnere Medium, ist dahin abzuwandeln, daß an der einen Seite ein Teil der einfallenden Welle zum Aufbau der begleitenden inhomogenen Welle des dünneren Mediums benötigt, der ausfallenden Welle entzogen und dieser erst am anderen Rande des ausfallenden Strahles wieder zugefügt wird. Bei der Totalreflexion solcher Wellen, die durch Intensitätsminima gekennzeichnet sind, treten zirkulierende Wellen auf, d. h. es gibt Gebiete, in denen der zeitgemittelte Energiestrom in geschlossenen Stromlinien umläuft.

## § 1

Die Strahlversetzung bei Totalreflexion des Lichtes hat von den Entdeckern dieses Effektes, Goos und Hänchen<sup>1</sup>, die anschauliche Deutung erfahren, daß der Lichtstrahl einen Umweg durch das dünnere Medium mache. Nach früheren Rechnungen des Verf.<sup>2</sup> wird die Strahlversetzung durch eine Änderung des  $\arctan r$  ( $r$  ist der Fresnelsche Reflexionskoeffizient), also der bei Reflexion auftretenden Phasenverschiebung, bei Änderung des Einfallswinkels bedingt. Es wäre denkbar, daß beide Auffassungen nur verschiedene Beschreibungen desselben Vorgangs sind.

Doch läßt sich im Experiment nicht mit einem einzelnen Strahl arbeiten, wie auch Goos und Hänchen (<sup>1</sup> S. 335) betonen, und das hat nicht nur eine experimentelle, sondern auch eine prinzipielle Folge für die Umwegauffassung; denn die Strahlversetzung ist selbst in günstigen Fällen klein gegenüber der Strahlbreite. Aus Gleichung (39) der früheren Arbeit<sup>2</sup> des Verf. geht hervor, daß die Subtilität des Effektes groß gegen 1 ist. Jener Umweg wäre also stets klein gegenüber der Wegbreite; damit verliert zunächst der entscheidende Teil des Umwegbildes an Anschaulichkeit. Ob diese auf irgendeine Weise wiederzugewinnen ist, kann mit Hilfe der Minimumstrahlkennzeichnung leichter und exakter geklärt werden als mit einem Energiestrahle, dessen theoretische Be-

handlung bei dieser ins einzelne gehenden Frage nur grob genähert möglich wäre.

Das ist der Gegenstand der hiermit vorgelegten Arbeit; zugleich wird dabei eine eigentümliche zirkulierende Welle aufgedeckt werden, die in der Optik neu ist.

## § 2. Die Amplituden der Welle

Ebenso wie man ein Minimum als Ersatz für den nicht existierenden scharfen Strahl verwenden kann, ist von einem beliebig scharf definierten Lichtweg in vielen Fällen zu sprechen, in denen sich Nullstellen der Intensität kontinuierlich aneinanderschließen. In diesem Sinne hatten wir in einer früheren Arbeit II<sup>3</sup> dem Lichtweg in der einfallenden Welle auch einen in der totalreflektierten zugeordnet; die einfallende Welle war durch Interferenz zweier ebener Wellen zusammengesetzt, deren Fortpflanzungsrichtungen den kleinen Winkel  $\Delta$  („Kreuzungswinkel“) miteinander bildeten. Die den Lichtweg markierenden Nullebenen der einfallenden bzw. der ausfallenden Welle waren dabei so gegeneinander an der Grenzfläche versetzt, daß es sinnvoll erschien, nach einer Verbindung derselben im dünneren Medium zu suchen. Berechnen wir aber z. B. im Falle senkrechter Polarisation (ähnlich liegen die Dinge bei paralleler Polarisation) und unter Annahme einer einfallenden Welle, wie Gl. (II, 2) der früheren Arbeit sie gibt, auch die elektrische Feldstärke im dünneren Medium, so erhalten wir

$$E_{2y} = 4\pi\Delta \operatorname{ctg} \bar{\varphi}_1 e^{i\beta} e^{-2\pi i x/\lambda} e^{z/F} \left\{ \frac{f}{\lambda} \frac{z'}{\lambda} - i \frac{x'}{\lambda} \right\} \quad (1)$$

\* Vorgetragen auf der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Hamburg am 23. April 1949.

<sup>1</sup> F. Goos u. H. Hänchen, Ann. Physik (6) 1, 333 [1947].

<sup>2</sup> H. Wolter, Z. Naturforsch. 5a, 143 [1950].

<sup>3</sup> Mit II sei kurz die Arbeit H. Wolter, Z. Naturforsch. 5a, 143 [1950], zitiert.



mit den Abkürzungen

$$z' = z - z_0; z_0 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 F^2} \operatorname{tg}^2 \bar{\varphi}_1; \beta = \frac{\lambda}{2\pi F} \operatorname{tg} \bar{\varphi}_1;$$

$$x' = x - \frac{D}{2 \cos \varphi_1}; f = \frac{\pi D}{\sin \varphi_1} \approx 2\pi F. \quad (2)$$

Darin ist  $\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1 + \varphi_1')/2$  das Mittel der Einfallswinkel der beiden einfallenden ebenen Wellen und also der Winkel, unter dem das Interferenzminimum

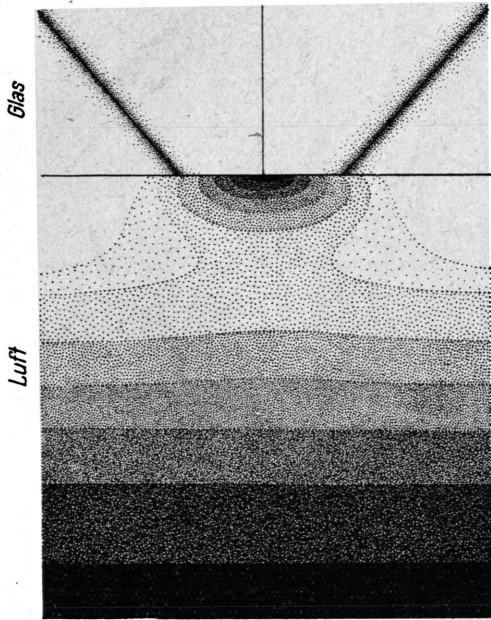


Abb. 1. Amplitudenverlauf der elektrischen Feldstärke im dünneren Medium bei der Totalreflexion einer durch eine Nullebene gekennzeichneten Welle.

auf die Grenzfläche trifft;  $F$  ist die Eindringtiefe im dünneren Medium nach Gl. (II, 18),  $D$  die Strahlversetzung nach Gl. (II, 19). Wir nehmen an, daß der Einfall nahe am Grenzwinkel geschehe ( $\alpha = \varphi_1 - \varphi_g \ll 1$ ;  $\alpha' = \varphi_1' - \varphi_g \ll 1$ ) und daß wir uns nicht in allzu großer Entfernung vom Nullpunkt des Koordinatensystems (auf der Grenzfläche gelegen) befinden, d. h.  $x \Delta \ll 1$ ,  $z \Delta \ll 1$ . Als Beispiel betrachten wir den Fall einer Glas-Luft-Grenze ( $n_1 = 1,52$ ;  $n_2 = 1$ ) und die Winkel  $\alpha = \varphi_1 - \varphi_g = 5 \cdot 10^{-3}$  Radian;  $\Delta = 3 \cdot 10^{-3}$  Radian; dann ist  $f^2 = 121 \lambda^2 \gg \lambda^2$  und die Rechnungen lassen sich relativ einfach durchführen.

Der Betrag der Feldstärke im dünneren Medium  $|E_{2y}|$  ist in Abb. 1 dargestellt. Quantitativ bedeuten die Schraffurstufen die Feldstärke 0 bis 0,2 (die unterste in der Abb.; diese ist bis ins Unendliche

fortgesetzt zu denken), 0,2 bis 0,4 usw. Die Feldstärke jeder der beiden einfallenden Wellen ist dabei zu 1 normiert.

Oben sind links die einfallende und rechts, getrennt davon, die ausfallende Welle qualitativ entsprechend behandelt. Hier kennzeichnen die Minima die Lichtwege, im dünneren Medium (unten) zeigt sich jedoch keine Verbindung. Das ist aber in diesem Falle durchaus nicht verwunderlich; treten doch auch in Glas die Minima nicht bei Darstellung der gesamten dort herrschenden Feldstärke auf im Einklang mit den Grenzbedingungen. Erst die Trennung in einfallende und ausfallende Welle ergibt die Minima als Marken des Lichtweges; diese Trennung hat nur dann Realität, wenn es ein Experiment — und sei es auch nur ein Gedankenexperiment — gibt, das die Trennung bewirkt. Die Mittel hierzu sind letzten Endes kaum verschieden von einer Halbebene, die in der oben in Abb. 1 gezeichneten Trennebene zwischen einfallender und ausfallender Welle anzubringen wäre. Freilich darf diese der Grenzfläche nicht allzusehr genähert werden, wenn sie nicht die Totalreflexion stark verändern soll. Die konsequente Verfolgung dieses Gedankens führt zu der Auffassung, daß nur im Limes sich nach oben ins Unendliche entfernen der Trennmittel, d. h. auch nur im Limes großen Abstandes von der Grenzfläche, die Aussagen über den Lichtweg im bisher betrachteten strengen Sinne reale Bedeutung haben.

### § 3. Phasenflächen

#### und zeitgemittelte Energieströmung

Es bleibt daher zur Gewinnung eines Überblicks nur noch, die Struktur der Welle im einzelnen darzustellen. Dazu gehört außer der Betrachtung des Feldstärkenbetrages zumindest noch eine Untersuchung der Phasen. Setzen wir

$$\chi = \arccos E \text{ und } \chi' = \chi - \beta + D \pi / \lambda \cos \bar{\varphi}_1, \quad (3)$$

so gibt

$$z'/\lambda = (x'/f) \operatorname{tg} (2\pi x'/\lambda + \chi' - \pi/2) \quad (4)$$

nach Gl. (1) die Flächen gleicher Phase im dünneren Medium. Abb. 2 zeigt diese im Schnitt mit der Ebene  $y = 0$ , und zwar die Bereiche

$$0^\circ \leq \chi' \leq 30^\circ \text{ und } 180^\circ \leq \chi' \leq 210^\circ$$

geschwärzt, alle anderen hell.  $\chi'$  wächst nach links. Führt man in Gl. (1) den Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  ein, so entnimmt man in bekannter Weise, daß für wachsende Zeit  $t$  die Phase  $\chi'$  abnimmt. Im zeitlichen Ablauf

haben wir also die schwarzen Bereiche von links nach rechts laufen zu lassen; nach einer halben Periodenlänge ist jeder dieser schwarzen Bereiche an die Stelle des nächsten gerückt. Man erhält so ein anschauliches Bild vom Laufen der Welle.

In großem Abstand von der Grenzfläche sind diese Wellenfronten Ebenen, die Wellenlänge diktiert in

front völlig ebene Gestalt an (hier nicht gezeichnet und berechnet).

Um ein Bild der momentanen reellen elektrischen Feldstärke zu erhalten, müßte man ein solches Phasenbild, bei dem statt einzelner schwarzer Streifen eine sinusförmige Schraffur gezeichnet wäre, mit dem Amplitudenbild (Abb. 1) überlagern. Das sich vor-

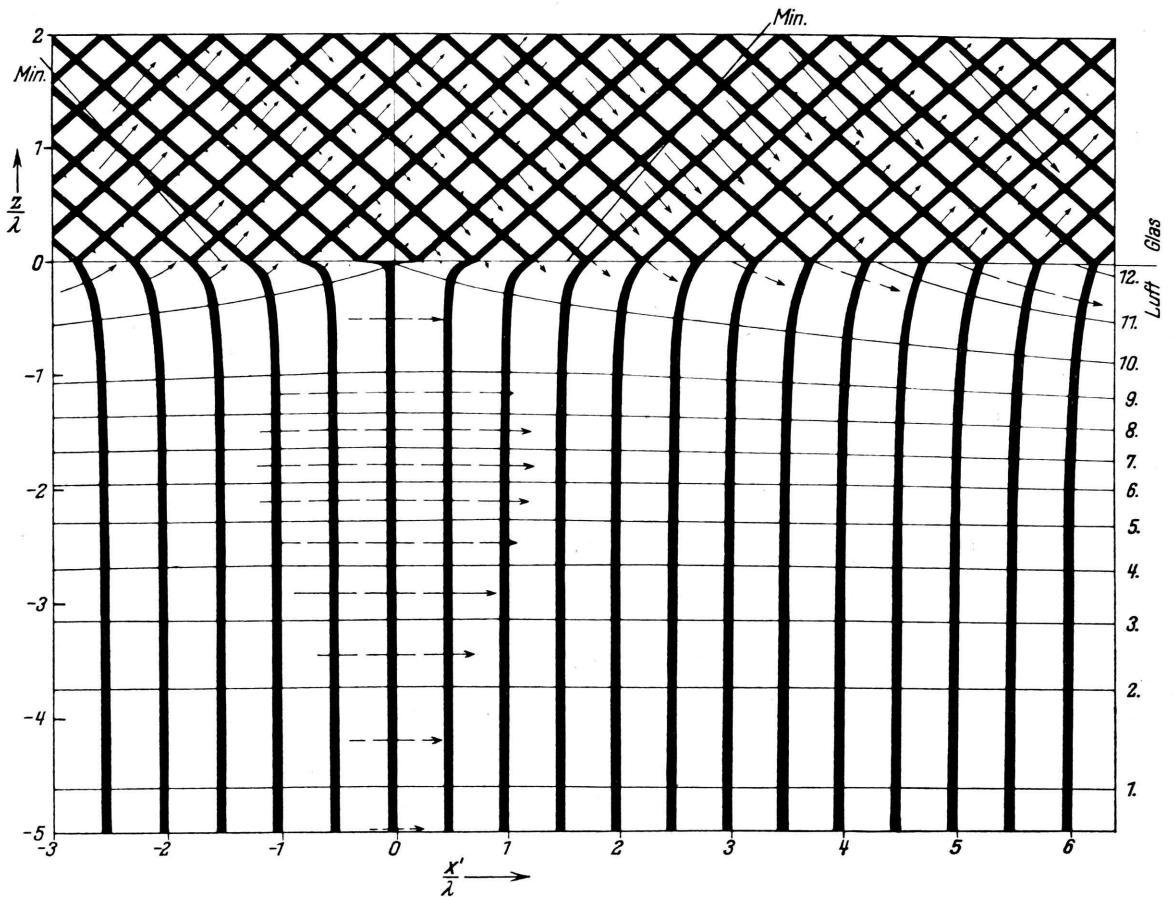


Abb. 2. Phasenflächen (schwarze Bereiche), zeitgemittelte Energiestromvektoren (Pfeile) und Energiestromlinien (dünne Kurven) bei der Totalreflexion einer durch eine Nullebene gekennzeichneten Welle.

üblicher Weise ihren Abstand, und alles verhält sich wie bei der ungekennzeichneten Welle bei Totalreflexion. Dagegen nahe an der Grenzfläche bleibt die Wellenfront um so mehr zurück, je mehr sie sich dem Nullpunkt nähert, und schnell dann plötzlich — scheinbar unstetig — über ihn hinaus, eilt dann zunächst vor gegenüber der Ebene und fügt sich ihr allmählich wieder ein; derselbe Vorgang wiederholt sich wegen der Mehrfachheit der Minima in einem zu unserer Blattgröße großen Abstand. Genau zwischen zwei solchen „Sprungstellen“ nimmt die Wellen-

zustellen, möge dem Leser überlassen bleiben; doch gibt Abb. 2 durch die eingezeichneten Pfeile mehr als einen Ersatz dafür; diese stellen den zeitgemittelten Poynting-Vektor, also die Energiestromung dar. Berechnet man nämlich aus (1) nach den Maxwell'schen Gleichungen die magnetische Feldstärke und dann den zeitgemittelten Poynting-Vektor, so erhält man für diesen im dünneren Medium

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_{2x} &= 2 \pi c \Delta^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}_1 e^{2z/F} [x'^2 + z' F (1 + 2 \pi f z')] \\ \bar{\mathcal{E}}_{2x} &= -2 \pi c \Delta^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}_1 e^{2z/F} x' F;\end{aligned}\quad (5)$$

darin wurde um der bequemer Schreibweise willen  $\lambda = 1$  gesetzt, wie in allen weiteren Formeln dieses Paragraphen. Insbesondere ergibt sich in der Ebene  $x' = 0$ , der „Symmetrieebene“ zwischen einfallender und reflektierter Welle (man beachte die dünn im Glas-Teil eingetragenen Minima beider Wellen), daß der Energiestromvektor  $\vec{\mathcal{E}}$  hier parallel zur Grenzfläche verläuft ( $\vec{\mathcal{E}}_z = 0$ ) und einen Betrag proportional zu

$$|\vec{\mathcal{E}}_2(z' = 0)| \sim e^{2z'/F} z' (1 + 2\pi f z') = 2\pi f z'^2 e^{2z'/F} \quad (6)$$

hat, wie das die dort eingezeichneten Pfeile veranschaulichen.

Die in verschiedenen Teilen der Abb. 2 angegebenen Pfeile, die den zeitgemittelten Poynting-Vektor darstellen, wurden bei größerer Länge unterbrochen gezeichnet, um Verwechslungen mit den Energiestromlinien ( $\vec{\mathcal{E}}$ -Linien) vorzubeugen, die als dünne Kurven (am rechten Rande von 1. bis 12. numeriert) fast horizontal durch das dünnere Medium laufen und aus Gl. (5) offenbar durch Lösung der Differentialgleichung

$$dx'/dz' = \vec{\mathcal{E}}_{2x}/\vec{\mathcal{E}}_{2z};$$

$$\text{d. h. } dx'/dz' + x'/F + z'(1 + 2\pi f z')/x' = 0 \quad (7)$$

zu erhalten sind. Diese Bernoullische Differentialgleichung kann in bekannter Weise durch Substitution  $x'^2(z') = u(z')$  in die lineare

$$du/dz' + 2u/F + 2z'(1 + 2\pi f z') = 0$$

transformiert und dann mit der Variation der Konstanten gelöst werden; man erhält

$$x'^2 = x'^2(z'; k) = x'^2(z'; 0) + k \cdot 10^{-4} e^{-2z'/F} \quad (8)$$

mit  $x'^2(z'; 0) = A(1 - e^{-2z'/F}) + Bz' + Cz'^2$ ;

$$A = -F^2(f^2 - 1)/2 = -183,7;$$

$$B = F(f^2 - 1) = 210;$$

$$C = -f^2 = -121.$$

Die Zahlenwerte für die Konstanten  $A, B, C$  beziehen sich auf das spezielle, unseren Abbildungen zugrundeliegende Zahlenbeispiel.  $k$  ist Integrationskonstante und Parameter der Kurvenschar. Wenn die zunächst unmittelbar bei Integration der Differentialgleichung erhaltene Integrationskonstante gleich  $k \cdot 10^{-4}$  gesetzt wurde, so aus dem rein praktischen Grunde, daß in einer der folgenden Zeichnungen die Beschriftung dadurch vereinfacht wird.

Für die Zeichnung Abb. 2 wurden  $k$ -Werte, d. h. ausgewählte Energiestromlinien so ermittelt, daß zwischen je zweien 10% der gesamten die Achse  $x' = 0$  im dünneren Medium überlaufenden Energie strömt; das ist möglich, da  $\vec{\mathcal{E}}$  divergenzfrei ist. Die Durchstoßungspunkte dieser ausgewählten Energiestromlinien mit der Achse  $x' = 0$  seien mit  $z^{(n)}$  bezeichnet und können nach unserer Festsetzung aus der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{z^{(n)}} \vec{\mathcal{E}}_{2x}(x' = 0) dz' = n/10 \int_{-\infty}^0 \vec{\mathcal{E}}_{2x}(x' = 0) dz', \quad (9)$$

d. h. durch nomogrammetrische Auflösung der Gleichung

$$e^{2z^{(n)}/F} \{ (2z^{(n)}/F)^2 - 2(2z^{(n)}/F) + 2 \} = n/5, \quad (10)$$

nach  $z^{(n)}$  berechnet werden; daraus folgen unter Verwendung der Gl. (8) die  $k$ -Werte und schließlich die Lösungskurven selbst.

Die Energiestromlinien sind an ihrem rechten Ende numeriert. Die 0. Linie liegt parallel zur Grenzfläche im Unendlichen; unterhalb der 1. Energiestromlinie läuft also insgesamt nur noch die gleiche Energie wie beispielsweise zwischen der 1. und 2. oder der 6. und 7. Sämtliche Energiestromlinien sind trotz Strahlkennzeichnung und Inhomogenität der Welle orthogonale Trajektorien zu den Phasenflächen, wie man aus ihrer Differentialgleichung (7) verifiziert; denn für die Phasenflächen (4) findet man durch Differentiation und Elimination des Parameters  $\chi'$  die Differentialgleichung

$$-dz'/dx' + x'/F + z'(1 + 2\pi f z')/x' = 0. \quad (11)$$

In großer Entfernung von der Grenzfläche weichen die Energiestromlinien wenig von der an der ungekennzeichneten ebenen Welle her geläufigen geradlinigen Form ab. In der Nähe der Grenzfläche strömt aber links Energie aus dem dünneren Medium heraus und rechts wieder herein, wie z. B. die an der Grenzfläche selbst gezeichneten Poynting-Vektoren quantitativ zeigen. Im dichteren Medium wurden die Phasenflächen (hier Ebenen) der einfallenden und der ausfallenden Welle ebenfalls, und zwar hier getrennt, eingetragen; auch die dort gezeichneten Pfeile geben die entsprechenden zeitgemittelten Poynting-Vektoren. Außerdem wurden Spuren der Minimalebene dünn eingezeichnet.

Zwischen einfallender, ausfallender und inhomogener Welle wird daraus folgendes Zusammenspiel in energetischer Hinsicht erkennbar. Die einfallende



Welle hat links von dem Nullpunkt  $x' = 0$ ,  $z' = 0$  ihre Nullebene, kann dort also energetisch die ausfallende Welle nicht ausreichend beliefern, deren Nullebene selbst nach rechts versetzt ist. Den erforderlichen Energiezuschuß links vom Nullpunkt liefert die inhomogene Welle aus dem dünneren Medium heraus; umgekehrt liegen die Verhältnisse rechts, wo die einfallende Welle stärker als die ausfallende ist und wieder zur Ergänzung der inhomogenen Welle Energie ins dünnere Medium schickt.

Betrachten wir die Verhältnisse im Hinblick auf die Reflexion eines zwischen zwei benachbarten Minima der einfallenden Welle liegenden Lichtbandes, so erhalten wir damit auch zugleich ein annähernd qualitativ auf den einzelnen „Strahl“ übertragbares Bild. Das Lichtband baut an seinem linken Rande auf Kosten der Reflexion zunächst die inhomogene Welle im dünneren Medium auf, die ja zur stetigen Abstützung der im dichteren Medium laufenden Wellen unentbehrlich ist. Die hierfür aufgewandte Energie wird am rechten Rande des Lichtbandes wieder verfügbar und strömt dort mit der ausfallenden Welle aus. So erscheint die Strahlversetzung unmittelbar als Folge der um der Stetigkeit willen notwendigen inhomogenen Welle selbst. Dieses Bild hat an die Stelle der Umwegauffassung zu treten und steht an Anschaulichkeit nicht hinter ihr zurück.

Es sei hier nur gleichsam am Rande berichtet von der Aufklärung einer zu diesem Problem gehörenden Meinungsverschiedenheit in der Literatur. König<sup>4</sup> zitiert eine auf Reflexion eines begrenzten Lichtbandes bezügliche Äußerung von W. Voigt<sup>5</sup>: „Am vorderen Rande, wo die Welle die Grenzfläche zuerst trifft, wird jene tangentielle Energieströmung auf Kosten der reflektierten Energie entstehen, an dem hinteren Rande der Welle, da wo sie die Grenzfläche zuletzt berührt bzw. endgültig verläßt, wird sie, da sie die zu ihrer Erhaltung nötige Wechselwirkung mit der Bewegung im ersten Mittel nicht mehr findet, ihren Charakter ändern und sich im Raum zerstreuen. Da diese Energie nur auf Kosten der reflektierten entstehen kann, so kann man im strengen Sinne nicht mehr von total reflektiertem Lichte sprechen, wenn auch der Betrag zu gering ist, um ihn als Fehlbetrag am total reflektierten Lichte nachweisen zu können.“ A. Schuster<sup>6</sup> errechnet genau das von Voigt beschriebene Verhalten, kennt aber offenbar die alte Voigtsche Äußerung nicht; denn die Schlußsätze seiner Arbeit lauten: „I have not been able to find in the literature of the subject more than one passage in which the difficulties

discussed in this communication are recognised. That passage is contained in Drudes „Lehrbuch der Optik“, where it is suggested that the light enters the second medium at the edge of one side and returns into the first medium at the other. The results of this paper support the first, and disprove the second suggestion.“

Die Drudesche Äußerung<sup>7</sup> ist in der dem Verf. einzig zugänglichen 3. Auflage (bearbeitet von Gehrke) nicht mehr enthalten, sie trifft aber, soweit das an Schusters Mitteilung zu beurteilen ist, genau unsere Auffassung; diese ist also vor 5 Jahrzehnten bereits vertreten, aber in der Folgezeit als falsch angesehen worden. Raman<sup>8</sup> scheint darin insofern noch einen Schritt weiter als Voigt und Schuster gegangen zu sein, als er sogar auch am vorderen Rande des Lichtbandes eine „Zerstreuung“ des Lichtes beschreibt. Die Ramansche Arbeit ist dem Verf. nicht zugänglich, findet sich aber zitiert bei König<sup>4</sup>.

Die Aufklärung ergab sich nun leicht durch eine Wiederholung und Ergänzung der Ramanschen Experimente in dem Sinne, daß sowohl die Voigt-Schuster-Ramansche als auch die Drudesche Auffassung gültig sind — aber für verschiedene Versuchsbedingungen. Im ersten Falle liegt die Begrenzung des total zu reflektierenden Lichtbandes in der Grenzfläche selbst, wie Schuster es auch ausdrücklich formulierte; im zweiten Falle liegt sie sehr weit vor ihr, wie wir hier ebenso wie Goos und Hänchen annehmen. (Daß Drude die Voraussetzungen seiner Aussage formuliert hat, ist unwahrscheinlich, da andernfalls die Ursache der Diskrepanz Schuster sicher nicht entgangen wäre.)

Der erste Fall wurde so realisiert, daß rotes Licht an der versilberten Hypothenusenfläche eines Rechtwinkelprismas reflektiert wurde; jedoch war ein Streifen der Versilberung senkrecht zur Einfallsebene mit einem Rasierklingenstückchen entfernt worden, so daß dort Totalreflexion eintrat. Von der Luftseite wurde die strittige Grenze des Ag-Streifens mikroskopisch betrachtet; sie erschien in der Tat als feine helle Linie (einseitig begleitet von schwächeren und noch feineren Parallelinien), „zerstreute“ also offenbar das Licht im oben beschriebenen Sinne. Das Verhalten ist verständlich, da die inhomogene Welle dort an ihrem Austritt ins dichtere Medium durch die plötzlich im Wege stehende Ag-Schicht gehindert und ins dünnere Medium zurückgebeugt und reflektiert wird. Anders lagen die Verhältnisse im zweiten Falle, wenn also, wie bei den in II Teil VIII beschriebenen Versuchen, ein selbst begrenzter „Energistrah“ an einer praktisch unbegrenzten Glas-Luft-Fläche totalreflektiert wurde; im dünneren Medium konnte im entscheidenden Teil der Grenzfläche keinerlei „zerstreutes“ Licht nachgewiesen werden. Damit scheint die Diskrepanz im Sinne unserer oben gegebenen Darstellung aufgeklärt zu sein.

Dennoch wird sich eine quantitative Untersuchung des ersten Versuches noch lohnen, vor allem auch im reflektierten Lichte, wo zwischen Ag-Teil und totalreflektierendem Teil der Grenzfläche ein dunkler Streifen nachgewiesen werden konnte; doch überschreitet das den Rahmen

<sup>4</sup> König, Geiger-Scheel, Hdb. Physik 20, 234 [1928].

<sup>5</sup> W. Voigt, Compendium d. theor. Physik, Bd. 2, S. 642, Leipzig 1896.

<sup>6</sup> A. Schuster, Proc. Roy. Soc. [London] Ser. A (2) 107, 15 [1925].

<sup>7</sup> P. Drude, Lehrb. der Optik, 1. Auflage, etwa 1900.

<sup>8</sup> C. V. Raman, Proc. Indian Ass. Cultiv. Sci. 9, 271 [1926].

des hier gewählten Themas. Lohnend scheint auch trotz der Näherung ein Ausbau der Artmannschen Theorie zur Klärung der Frage direkt am Energiestrahle, da gerade dieser trotz seiner nicht immer großen Eignung für solche Untersuchungen aus Gründen der Gewohnheit (und anderen) besonderes Interesse besitzt<sup>9</sup>.

#### § 4. Die zirkulierende Welle

Bei der Diskussion der Abb. 2 war die Untersuchung des scheinbar unstetigen Überspringens am Punkte  $z' = 0$ ,  $x' = 0$  durch die Phasenlinien aufgeschoben worden; das geschah im wesentlichen, da

diese Untersuchung eine nicht uninteressante Erscheinung aufdeckte, die ohnehin eine ausführlichere Betrachtung nötig machte. Da dieses Problem nicht von der Frage nach der Stetigkeit an der Grenzfläche getrennt werden kann, müssen wir außer den Wellen im dünneren Medium auch die vollständige — aus einfallender und ausfallender Welle summierte — Erregung im dichteren Medium kennen. Dort findet man aus Gl. (II, 2) und (II, 6) für die aus  $E_a$  und  $E_r$  addierte Feldstärke  $E_{1y}$  bzw. für den zugehörigen zeitgemittelten Poynting-Vektor

$$E_{1y} = -4\pi i \Delta \operatorname{ctg} \bar{\varphi}_1 e^{i\beta} e^{-i2\pi x} \left\{ x' \cos(2\pi n_1 c_1 z') + i(z + F) \frac{\sin(2\pi n_1 c_1 z')}{n_1 c_1} \right\} \quad (12)$$

$$\bar{\mathcal{S}}_{1x} = 2\pi c \Delta^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}_1 e^{2z/F} \left\{ x'^2 \cos^2 2\pi \gamma_1 z' + (z + F)^2 \frac{\sin^2(2\pi \bar{\gamma}_1 z')}{\bar{\gamma}_1^2} + (z + F) \frac{\sin(4\pi \bar{\gamma}_1 z')}{4\pi \bar{\gamma}_1} \right\} \quad (13)$$

$$\bar{\mathcal{S}}_{1z} = -2\pi c \Delta^2 \operatorname{ctg}^2 \bar{\varphi}_1 e^{2z/F} x' \left\{ z + F + \frac{\sin(4\pi \bar{\gamma}_1 z')}{4\pi \bar{\gamma}_1} \right\}; \quad c_1 = \cos \bar{\varphi}_1; \quad \bar{\gamma}_1 = n_1 c_1. \quad (14)$$

Aus (12) folgen die Flächen gleicher Phase im dünneren Medium

$$\frac{z + F}{n_1 c_1} \operatorname{tg}(2\pi n_1 c_1 z') = x' \operatorname{tg}(2\pi x' + z' - \pi/2) \quad (15)$$

und können ganz allgemein leicht unter Einführung einer Zwischenvariablen [gleich der linken bzw. der rechten Seite der Gl. (15) gesetzt] berechnet werden.

Die Energiestromlinien sind wieder orthogonale Trajektorien zu den Phasenflächen und gehorchen einer aus (12) unmittelbar zu gewinnenden Bernoulli'schen Differentialgleichung, die für den uns interessierenden Bereich nahe der Grenzfläche  $|z'| \ll \lambda$  genähert mit Gl. (7) identisch ist und deren Lösungen bereits mit Gl. (8) — jetzt freilich für  $z' > -z_0$  — ausreichend erfaßt und also berechnet werden können.

Abb. 3 zeigt Schnitte der Phasenflächen mit der  $x', z'$ -Ebene (dicke Kurven) und Energiestromlinien (dünne Kurven), deren Dichte hier im Unterschied zu Abb. 2 nur nach anschaulichen Gesichtspunkten, nicht zur quantitativen Energiemittelung festgelegt wurde; dazu dienen vielmehr die an vielen Stellen dazwischen gezeichneten Poynting-Vektoren (Pfeile, die bei größerer Länge unterbrochen wurden, um Verwechselungen mit Energiestromlinien zu vermeiden). Das ganze Bild ist ein Ausschnitt aus Abb. 2 in der Umgebung des Punktes  $x' = 0$ ,  $z' = 0$  in einer 40-fachen linear vergrößerten Form.

Zwei Punkte der Achse  $x' = 0$  sind besonders wichtig, erstens der Punkt  $z' = 0$  im Glase, in dem sich

Phasenflächen einer vollen Periode schneiden, zweitens der Sattelpunkt im dünneren Medium nahe der Grenzfläche, in dem die Energiestromlinie  $k = 0,692$  und die Spur der Phasenfläche  $t = 0$  einen gemeinsamen Verzweigungspunkt haben.

Verfolgen wir an Hand der angeschriebenen Zeiten den Lauf der Phasenflächen und die Energiestromung! Die inhomogene Welle erscheint auf dem Blatt links unten (Phasenfläche  $t = -2/40$  Perioden), läuft dann über  $t = -1/40$  Perioden und über  $t = -1/100$  Perioden auf die zum Flächenpaar entartete Phasenfläche  $t = 0$  zu. Dort „zerschellt“ sie an dem als „Wellenbrecher“ wirksamen Sattelpunkt; ihre rechte Hälfte schwenkt nach rechts unten ins dünnere Medium, die linke Hälfte läuft über die Grenzfläche ins Glas hinein, wendet sich dort wieder nach rechts, läuft nach einer halben Periode ( $t = 20/40$  Perioden) genau in  $x'$ -Richtung, schwenkt wieder nach unten rechts der Grenzfläche zu, überläuft diese und erreicht mit ihrem rechten Ende den Sattelpunkt gerade wieder in dem Augenblick  $t = 1$  Periode, in dem dort die nächste Welle „zerschellt“ und die zuerst genannte zur stetigen Abstützung in Empfang nehmen kann. Während die eine Wellenhälfte im Uhrzeigersinne durch das Glas schwenkte, wurde sie rechts stetig abgestützt durch eine um den Punkt  $x' = 0$ ,  $z' = 0$  zirkulierende Welle, die jede am Sattelpunkt zerschellende in Empfang

<sup>9</sup> Anmerk. b. d. Korrektur: Das geschah bereits während der Drucklegung dieser Arbeit. Siehe: C. v. Fragstein, Ann. Physik (65) 4, 271 [1949].

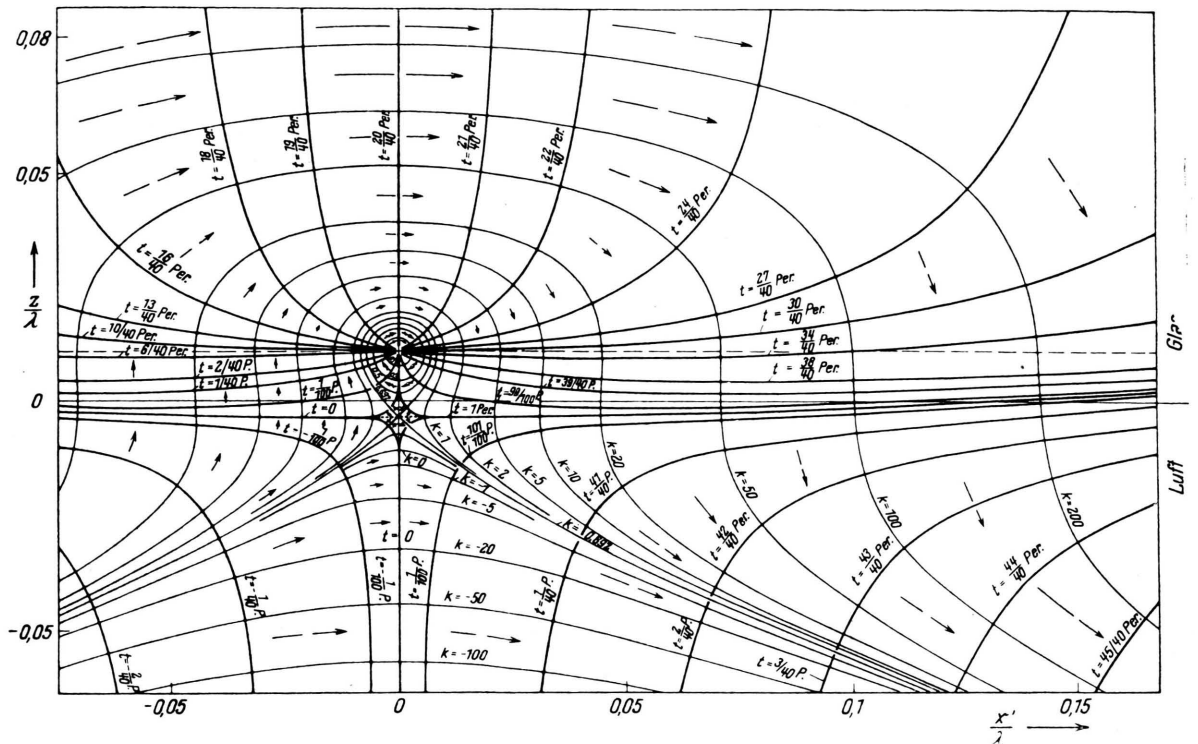


Abb. 3. Phasenflächen (dicke Kurven), zeitgemittelte Energiestromvektoren (Pfeile) und Energiestromlinien (dünne Kurven) bei der Totalreflexion einer durch eine Nullebene gekennzeichneten Welle in der Nähe der Grenzfläche. Im dichteren Medium (oben) wurde die gesamte Lichterregung aus einfallender und ausfallender Welle gebildet.

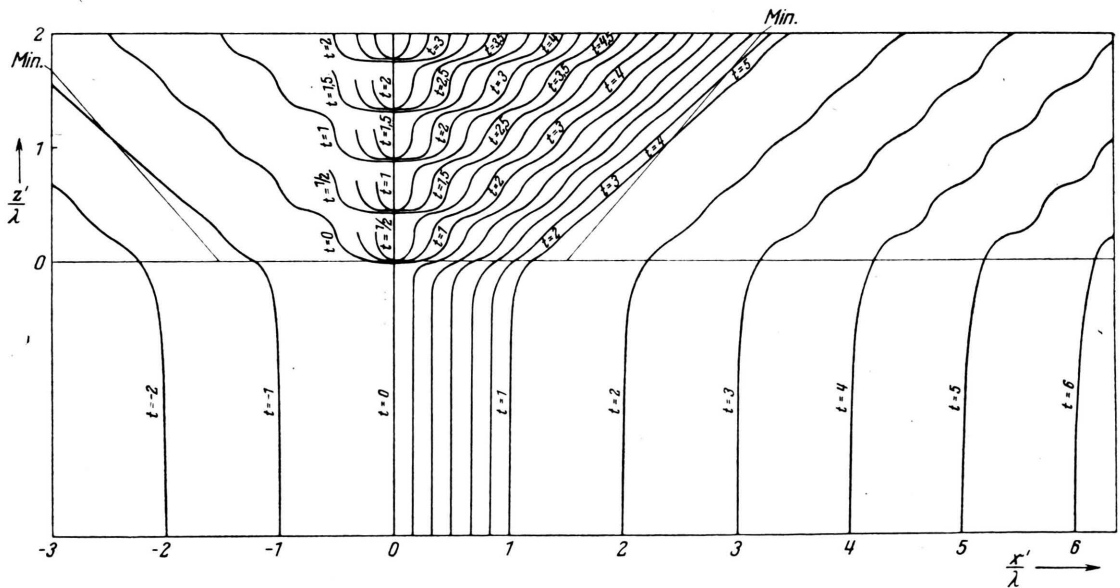


Abb. 4. Phasenflächen bei der Totalreflexion einer durch eine Nullebene gekennzeichneten Welle. Im dichteren Medium (oben) wurde ebenfalls die gesamte Lichterregung (einfallende und ausfallende Welle addiert) benutzt. Die eingetragenen Zeiten sind in Perioden gemessen.

nimmt, sie eine Periode lang begleitet und dann wieder an die „rechte“ Hälfte der nächsten Welle abgibt. Die Stetigkeit ist also durch die Mitwirkung der zirkulierenden Welle selbst gewahrt.

Im Zentrum  $x' = 0, z' = 0$  verschwindet die zirkulierende Welle, wie aus den oben angeschriebenen Gleichungen hervorgeht. Die Energieströmung ist in der Umgebung des Zentrums sehr klein; daher wurden die Poynting-Vektoren dort 10-fach verlängert gezeichnet (angemerkt durch einen Schrägstrich durch die Pfeile), auch am Sattelpunkt verschwindet die Energieströmung; die Poynting-Vektoren wurden dort 100-fach verlängert (angemerkt durch 2 Schrägstriche durch den Pfeil). Wenn man den Phasenflächen eine Strichdicke entsprechend einem bestimmten Zeitintervall geben würde, so müßte die Umgebung des Sattelpunktes bis zu den dick asteroideartigen Kurven schwarz gezeichnet werden.

Die zirkulierende Welle ist eine in der Optik zwar neue, aber durchaus unkomplizierte Erscheinung; ist sie mathematisch doch einfach durch geeignete Addition von sechs ebenen Wellen, vier homogenen und zwei quergedämpften darzustellen. Eine sehr ähnliche Zirkulation ergibt sich sogar aus vier homogenen, ebenen Wellen allein, wie sie im dichteren Medium bei der Totalreflexion einer mit Nullebenen gekennzeichneten Welle auftreten. Berechnet und zeichnet man nämlich die hier in der Umgebung des Null-

punktes dargestellten Phasenflächen auch weiter im Glasinnern für die vollständige — aus einfallender und reflektierter Welle zusammengesetzte — Erregung nach Gl. (12), so erhält man die Abb. 4. Diese zeigt außer dem in Abb. 3 Dargestellten darüber noch vier weitere der abzählbar vielen Zirkulationszentren. Die Energiestromlinien sind wieder als orthogonale Trajektorien zu denken. An jedem Zirkulationszentrum erfolgt ein Schwenken der Phasenflächen und ein Umlauf von einer Periode. Diese dauernden Schwenkungen sind offenbar erforderlich, um das Ausströmen der Energie aus dem dünneren Medium links der Achse  $x' = 0$  und ein Zurückströmen rechts von ihr zu ermöglichen, ohne daß es zu Unstetigkeiten kommt. Dieses Hin und Her der Energie tritt bei der ungekennzeichneten — also unbegrenzten einfachen ebenen Welle — nicht auf, wie ja bekannt ist; dort laufen alle  $\vec{E}$ -Linien in beiden Medien parallel der Grenzfläche. Die Zirkulationen bei der Totalreflexion (und ähnlich in anderen Fällen, die hier nicht diskutiert werden mögen) sind ersichtlich eine notwendige Begleiterscheinung der Strahlkennzeichnung selbst. Das läßt das Auftreten solcher Zirkulationen auch bei anderen als den hier zur Strahlkennzeichnung benutzten Ungleichmäßigkeiten der total zu reflektierenden Welle vermuten.

Verf. dankt Hrn. Prof. Dr. L o c h t e - H o l t g r e v e n für die lebenswürdige Unterstützung seiner Arbeit.

## Über mögliche Strukturabhängigkeiten des Metallelektrodenpotentials

VON WOLFGANG LORENZ

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. 5 a, 283—291 [1950]; eingegangen am 4. April 1950)

Die Abhängigkeit des Metallelektrodenpotentials von Kristallgröße und kristallographischer Oberflächenstruktur wird theoretisch untersucht. Auf Grund der statistisch-thermodynamischen Theorie der Elektrodenpotentiale, der Kossel-Stranskischen Kristallwachstumstheorie und einiger Ergebnisse der Elektronenemissionsforschung ist folgendes zu erwarten:

1. Eine Verringerung der mittleren Atomabtrennungsarbeit, die bei sehr kleinen Kristallen auftritt, bewirkt eine Potentialverunreinigung.
2. Die Anisotropie der Elektronenaustrittsarbeit führt zu Potentialunterschieden zwischen verschiedenen Kristallflächenarten. Für das Elektrodenpotential sind dabei nicht die beobachtbaren Flächenaustrittsarbeiten, sondern die Austrittsarbeiten aus den zugeordneten Wachstumsstellen maßgebend.
3. Die Gleichgewichtspotentiale sollten im allgemeinen durch Elektrolytadsorption nicht beeinflusst werden.
4. Das Gleichgewicht eines Kristalls in Elektrolytlösung wird durch die Anisotropie des Elektrodenpotentials bestimmt; danach ist nur die Flächenart mit dem negativsten Potential stabil.
5. Das absolute Potential erfährt in seinem theoretischen Wert eine Änderung.

Es werden Möglichkeiten besprochen, die die Anwendbarkeit der Theorie einschränken können, und zum Schluß verschiedene Beobachtungen im Sinne der entwickelten Theorie neu gedeutet.